PART3 極値をもつための条件

要点整理と公式

要点① 関数が極値をもつための条件

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であるとき

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\Longrightarrow$

が成り立つ。つまり，$f'(a)=0$ であることは，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための

である。この条件のもとで，さらに $x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わることで，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる，ということができる。

(ex) 関数 $f(x)=\dfrac{ax-6}{x^2+1}$ が $x=2$ で極値をとるような定数 a の値について

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-(ax-6)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2+12x+a}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$ は $x=2$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=2$ で極値をとるならば

よって $\dfrac{-3a+24}{25}=0$ より $a=8$

このとき

$$f(x)=\frac{8x-6}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{-8x^2+12x+8}{(x^2+1)^2}=-\frac{4(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$		-8		2	

したがって，確かに $f(x)$ は $x=2$ で極大値 2 をとる。

ゆえに，関数 $f(x)$ が $x=2$ で極値をとるような定数 a の値は $a=8$

[MEMO]

3 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-7x+a}{x-2}$ が $x=3$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。

Point Pickup

関数が極値をもつための条件

$x=a$ で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための条件は

$f'(a)=0$　かつ　$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わる

第 11 講 PART3 確認問題

1 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+a}{x-3}$ が $x=1$ で極値をとるような定数 a の値を求めよ。

$$f'(x)=\frac{x^2-\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イウ}}-a}{(x-3)^2}$$

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるならば，$f'\left(\boxed{\text{エ}}\right)=\boxed{\text{オ}}$ である。

よって，$a=\boxed{\text{カ}}$

逆に，このとき，

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)}{(x-3)^2}$$

であり，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\boxed{\text{クケ}}$ をとる。

ゆえに，求める a の値は，$a=\boxed{\text{カ}}$

PART3 極値をもつための条件

3 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-7x+a}{x-2}$ が $x=3$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。

[解答]

$f(x)$ の定義域は $x \neq 2$

$$f'(x)=\frac{(2x-7)(x-2)-(x^2-7x+a)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+14-a}{(x-2)^2}$$

$f(x)$ は $x=3$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=3$ で極値をとるならば $f'(3)=0$

よって $11-a=0$ より $a=11$

このとき

$$f(x)=\frac{x^2-7x+11}{x-2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -5	↘	／	↘	極小 -1	↗

したがって，確かに $f(x)$ は $x=3$ で極小値 -1 をとる。

ゆえに，求める a の値は $a=11$

第11講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イウ：12，エ：1，オ：0，
カ：7，キ：5，クケ：-2

[解説]

$f(x)$ の定義域は，$x \neq 3$

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-3)-(x^2-4x+a)\cdot 1}{(x-3)^2} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{x^2-6x+12-a}{(x-3)^2}$$

[A]　$f'(x)$
$=\dfrac{(x^2-4x+a)'(x-3)-(x^2-4x+a)\cdot(x-3)'}{(x-3)^2}$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるならば，[B]

$$f'(1)=0$$

[B]　$x=a$ で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための条件は，
「$f'(a)=0$ かつ $x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わる」

よって，$1-6+12-a=0$ より，

$$a=7$$

逆に，$a=7$ のとき，

$$f(x)=\frac{x^2-4x+7}{x-3} \quad \text{[C]}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$$

[C]　$a=7$ のときに $f(1)$ が極値となることを確かめる必要がある。

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -2	↘	／	↘	極小 6	↗

したがって，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 -2 をとる。

ゆえに，求める a の値は，$a=7$